

文章编号:1005-3085(2010)01-0139-06

# 捕食-被捕食二维 Lotka-Volterra 模型的 $\beta$ 持续生存与 $\beta$ 绝灭\*

阎慧臻<sup>1</sup>, 马知恩<sup>2</sup>, 刘 燕<sup>1</sup>

(1- 大连工业大学信息科学与工程学院, 大连 116034; 2- 西安交通大学数学系, 西安 710049)

**摘 要:** 利用极限理论与延拓方法, 研究了捕食-被捕食二维 Lotka-Volterra 模型在有限时间内的持续生存与绝灭问题, 即  $\beta$  持续生存与  $\beta$  绝灭问题。所得结论表明: 种群的  $\beta$  持续生存和  $\beta$  绝灭与种群的初始数量有关。在一定条件下, 只要控制食饵种群与捕食种群的初始数量在一定范围内, 即可保证两种群永远  $\beta$  持续生存。

**关键词:** 捕食-被捕食模型;  $\beta$  持续生存;  $\beta$  绝灭

**分类号:** AMS(2000) 92B05

**中图分类号:** O29; Q141

**文献标识码:** A

## 1 引言

对于由 Logistic 方程所描述的一维种群模型和由二维 Lotka-Volterra 方程所描述的两种群模型, 由解的唯一性知: 从任一正初始值出发的解都不可能在有限时间内变为零, 反映在生物学上即表示种群不可能在有限时间内绝灭。但在实际中, 如果环境中毒素浓度很大, 或种群的数量少于一定的限度, 种群就将无法生存而很快地绝灭。因此, 有必要研究种群在有限时间内的持续生存与绝灭问题, 即  $\beta$  持续生存与  $\beta$  绝灭问题<sup>[1-3]</sup>。本文研究了捕食-被捕食二维 Lotka-Volterra 模型的  $\beta$  持续生存与  $\beta$  绝灭的问题, 给出了  $\beta$  持续生存与  $\beta$  绝灭的一些充分条件。

## 2 定义及引理

**定义 1** 对于给定常数  $\beta > 0$ , 如果当  $0 \leq t < T$  ( $0 < T \leq +\infty$ ) 时, 有

$$x(t) > \beta, \quad \lim_{t \rightarrow T^-} x(t) = \beta,$$

则称种群  $x(t)$  于时刻  $T$  在种群水平  $\beta$  上走向绝灭, 或称  $\beta$  绝灭; 如果种群  $x(t)$  在  $[0, T]$  上的任一时刻均不  $\beta$  绝灭, 则称种群  $x(t)$  于  $[0, T]$  上在种群水平  $\beta$  上持续生存, 或称  $\beta$  生存。

考虑如下两种群 Lotka-Volterra 模型

$$(M) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(r_{11} - a_{11}x_1 - a_{12}x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(r_{21} - a_{21}x_1 - a_{22}x_2) \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2008-06-06. 作者简介: 阎慧臻(1965年11月生), 女, 博士, 教授. 研究方向: 生物数学.

\*基金项目: 辽宁省教育厅科技研究项目(2009A075).

其中  $a_{11} > 0$ ,  $a_{22} > 0$ , 即种群  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  均为密度制约的。当参数  $a_{12} > 0$ ,  $a_{21} < 0$  时, 称模型 (M) 为捕食-被捕食系统 (并假设  $r_{11} > 0$ ,  $r_{21} < 0$ , 即捕食者  $x_2(t)$  仅以食饵  $x_1(t)$  为食)。

为书写方便, 引入以下记号: 记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\Delta_1 = a_{22}r_{11} - a_{12}r_{21}, \quad \Delta_2 = a_{11}r_{21} - a_{21}r_{11}, \quad \langle x \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds,$$

$$\langle x \rangle_* = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle x \rangle = \liminf_{t \rightarrow \infty} \langle x \rangle, \quad \langle x \rangle^* = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \langle x \rangle = \limsup_{t \rightarrow \infty} \langle x \rangle.$$

并假设  $\Delta > 0$ ,  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ , 即假设模型 (M) 中的  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  是永久持续生存的<sup>[4]</sup>。

引理 1<sup>[4]</sup> 捕食-被捕食系统 (M) 从第一象限出发的解均有界, 且最终一致有界。

### 3 主要结果

定理 1 考虑捕食-被捕食系统 (M)。

1) 对于食饵种群  $x_1(t)$ , 当  $\beta < \frac{\Delta_1}{\Delta}$ ,  $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \geq 0$  时, 若

$$\beta < x_1(0) \leq \frac{\Delta_1 - a_{11}a_{22}\beta}{-a_{21}a_{12}}, \quad \frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}} \leq x_2(0) \leq \frac{r_{11} - a_{11}\beta}{a_{12}},$$

则  $x_1(t)$  永远  $\beta$  持续生存。

2) 对于捕食种群  $x_2(t)$ , 当  $\beta < \frac{\Delta_2}{\Delta}$ ,  $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \geq 0$  时, 若

$$\frac{a_{22}\beta - r_{21}}{-a_{21}} \leq x_1(0) \leq \frac{r_{21}}{a_{21}} + \frac{a_{22}(\Delta_2 - a_{11}a_{22}\beta)}{a_{12}a_{21}^2}, \quad \beta < x_2(0) \leq \frac{\Delta_2 - a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}},$$

则  $x_2(t)$  永远  $\beta$  持续生存。

证明 1) 由

$$\Delta_2 > 0 \Rightarrow \frac{\Delta_1}{\Delta} < \frac{r_{11}}{a_{11}},$$

所以  $\beta < \frac{r_{11}}{a_{11}}$ ; 由

$$\Delta > a_{11}a_{22} \Rightarrow \frac{\Delta_1}{\Delta} < \frac{\Delta_1}{a_{11}a_{22}},$$

所以  $\beta < \frac{\Delta_1}{a_{11}a_{22}}$ 。

(I) 考虑

$$\frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}} > 0$$

时, (i) 首先证明如下命题。若

$$\beta < x_1(T) \leq \frac{\Delta_1 - a_{11}a_{22}\beta}{-a_{21}a_{12}}, \quad \frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}} \leq x_2(T) \leq \frac{r_{11} - a_{11}\beta}{a_{12}},$$

则存在  $\delta > 0$ , 使得  $t \in [T, T + \delta]$  时, 上面的式子也成立。

因为  $x_1(T) > \beta$ , 所以存在  $\delta_1 > 0$ , 使得  $t \in [T, T + \delta_1]$  时,  $x_1(t) > \beta$ . 若

$$x_2(T) > \frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}},$$

则存在  $0 < \delta < \delta_1$ , 使得  $t \in [T, T + \delta]$  时

$$x_2(t) \geq \frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}}.$$

若

$$x_2(T) = \frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}},$$

则

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx_2}{dt} \right|_{t=T} &= x_2(T) \left\{ r_{21} - a_{21}x_1(T) - a_{22} \left[ \frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}} \right] \right\} \\ &> x_2(T) \left\{ r_{21} - a_{21}\beta - a_{22} \left[ \frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}} \right] \right\} \\ &= x_2(T) \cdot \frac{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}}{-a_{12}^2a_{21}} \cdot (\Delta_1 - \Delta\beta) \geq 0. \end{aligned}$$

所以存在  $\delta > 0$  ( $\delta < \delta_1$ ), 使得  $t \in [T, T + \delta]$  时

$$x_2(t) \geq \frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}}.$$

所以在  $[T, T + \delta]$  上可得

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &\leq x_1 \left\{ r_{11} - a_{11}x_1 - a_{12} \left[ \frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}} \right] \right\} \\ &= a_{11}x_1 \left( \frac{\Delta_1 - a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}} - x_1 \right), \end{aligned}$$

又因为

$$x_1(T) \leq \frac{\Delta_1 - a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}},$$

所以由微分方程比较定理<sup>[5]</sup>知

$$x_1(t) \leq \frac{\Delta_1 - a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}},$$

所以可得

$$\frac{dx_2}{dt} \leq x_2 \left\{ r_{21} - a_{21} \cdot \frac{\Delta_1 - a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}} - a_{22}x_2 \right\} = a_{22}x_2 \left( \frac{r_{11} - a_{11}\beta}{a_{12}} - x_2 \right),$$

因为

$$x_2(T) \leq \frac{r_{11} - a_{11}\beta}{a_{12}},$$

所以

$$x_2(t) \leq \frac{r_{11} - a_{11}\beta}{a_{12}}.$$

(ii) 证明 (i) 中式子可无限延拓下去。否则, 设 (i) 中式子仅能延拓到某个开区间  $[0, \eta)$  上, 且由 (i) 的证明知

$$x_1(\eta) = \beta, \quad x_2(\eta) \leq \frac{r_{11} - a_{11}\beta}{a_{12}},$$

所以在  $[0, \eta]$  上可得

$$\frac{dx_1}{dt} \geq x_1 \left( r_{11} - a_{11}x_1 - a_{12} \cdot \frac{r_{11} - a_{11}\beta}{a_{12}} \right) = a_{11}x_1(\beta - x_1),$$

又因为  $x_1(0) > \beta$ , 所以  $x_1(t) > \beta$ ,  $t \in [0, \eta]$ , 则有  $x_1(\eta) > \beta$ 。矛盾!

由 (i) 和 (ii) 的证明知  $x_1(t)$  永远  $\beta$  持续生存。

(II) 考虑

$$\frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}} \leq 0$$

时, 此时对任意的  $t \in [0, +\infty)$

$$x_2(t) \geq \frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}}$$

显然成立, 所以在  $[0, +\infty)$  上可得

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &\leq x_1 \left\{ r_{11} - a_{11}x_1 - a_{12} \left[ \frac{r_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{11}(a_{11}a_{22}\beta - \Delta_1)}{-a_{12}^2a_{21}} \right] \right\} \\ &= a_{11}x_1 \left( \frac{\Delta_1 - a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}} - x_1 \right). \end{aligned}$$

又因为

$$x_1(0) \leq \frac{\Delta_1 - a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}},$$

所以由比较定理知

$$x_1(t) \leq \frac{\Delta_1 - a_{11}a_{22}\beta}{-a_{12}a_{21}},$$

所以可得

$$\frac{dx_2}{dt} \leq a_{22}x_2 \left( \frac{r_{11} - a_{11}\beta}{a_{12}} - x_2 \right).$$

因为

$$x_2(0) \leq \frac{r_{11} - a_{11}\beta}{a_{12}},$$

所以

$$x_2(t) \leq \frac{r_{11} - a_{11}\beta}{a_{12}},$$

则有

$$\frac{dx_1}{dt} \geq a_{11}x_1(\beta - x_1).$$

又因为  $x_1(0) > \beta$ , 所以  $x_1(t) > \beta$ ,  $t \in [0, +\infty)$ 。即:  $x_1(t)$  永远  $\beta$  持续生存。

2) 的证明与 1) 类似 (略)。

**定理 2** 考虑捕食-被捕食系统  $(M)$ 。

1) 若  $\beta > \frac{\Delta_1}{\Delta}$ , 则  $x_1(t)$  在有限时间内  $\beta$  绝灭。

2) 当  $a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \geq 0$  时, 若  $\beta > \frac{\Delta}{\Delta^*}$ , 则  $x_2(t)$  在有限时间内  $\beta$  绝灭。

证明 1) 利用反证法。假设  $t \in [0, +\infty)$  时,  $x_1(t) > \beta$ , 则

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) \geq \beta > 0.$$

再由引理 1 知  $x_1(t)$  有界, 所以

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln x_1(t) - \ln x_1(0)}{t} = 0.$$

把式 (1) 变形得

$$\frac{\ln x_1(t) - \ln x_1(0)}{t} = r_{11} - a_{11}\langle x_1 \rangle - a_{12}\langle x_2 \rangle, \quad (2)$$

$$\frac{\ln x_2(t) - \ln x_2(0)}{t} = r_{21} - a_{21}\langle x_1 \rangle - a_{22}\langle x_2 \rangle. \quad (3)$$

用式 (2) 乘以  $(-a_{22})$  并加上式 (3) 乘以  $a_{12}$ , 得

$$a_{12} \cdot \frac{\ln x_2(t) - \ln x_2(0)}{t} - a_{22} \cdot \frac{\ln x_1(t) - \ln x_1(0)}{t} = \Delta \cdot \langle x_1 \rangle - \Delta_1. \quad (4)$$

因为

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ a_{12} \cdot \frac{\ln x_2(t) - \ln x_2(0)}{t} - a_{22} \cdot \frac{\ln x_1(t) - \ln x_1(0)}{t} \right] \\ & \leq a_{12} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln x_2(t) - \ln x_2(0)}{t} - a_{22} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln x_1(t) - \ln x_1(0)}{t} \\ & = a_{12} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln x_2(t) - \ln x_2(0)}{t} \leq 0, \end{aligned}$$

所以对 (4) 式两边取极限得

$$0 \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} (\Delta \cdot \langle x_1(t) \rangle - \Delta_1) = \Delta \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle x_1(t) \rangle - \Delta_1 \geq \Delta \cdot \beta - \Delta_1,$$

即  $\beta \leq \frac{\Delta_1}{\Delta}$ , 矛盾! 故  $x_1(t)$  在有限时间内  $\beta$  绝灭。

2) 的证明类似于文 [4] 定理的证明 (略)。

#### 4 对定理结论的一些解释

由定理 1、定理 2 的结论可知, 当  $\beta < \frac{\Delta_i}{\Delta^*}$  ( $i = 1, 2$ ) 时, 只要限定种群  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  的初始数量  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  在一定的范围内 (不能太大, 也不能太小), 即可保证种群  $x_i(t)$  永远  $\beta$  持续生存。这与实际情形是相符的, 我们作如下分析。

对于食饵种群  $x_1(t)$ , 若初始数量  $x_1(0)$  太小, 显然无法保证  $x_1(t)$  永远  $\beta$  持续生存。但由于捕食种群  $x_2(t)$  以食饵种群  $x_1(t)$  为食物来源, 因此若  $x_1(0)$  太大, 会使捕食种群  $x_2(t)$  生长过快, 从而导致食饵种群  $x_1(t)$   $\beta$  的绝灭; 同样, 若捕食种群的初始数量  $x_2(0)$  太大, 显然会使食饵种群  $x_1(t)$  很快  $\beta$  绝灭。但若  $x_2(0)$  太小, 则会使食饵种群  $x_1(t)$  生长过快, 从而导致捕食种群  $x_2(t)$  生长过快, 这又进一步会导致  $x_1(t)$  会迅速  $\beta$  绝灭。因此, 只有当  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  都限定在一定范围内时, 才能使食饵种群  $x_1(t)$  永远  $\beta$  持续生存。

对于捕食种群  $x_2(t)$ , 若食饵种群的初始数量  $x_1(0)$  太小, 则显然无法保证  $x_2(t)\beta$  的持续生存, 但若  $x_1(0)$  太大, 会使捕食种群  $x_2(t)$  生长太快, 从而导致食饵种群  $x_1(t)\beta$  的绝灭, 这又进一步使捕食种群  $x_2(t)\beta$  发生绝灭; 同样, 若捕食种群的初始数量  $x_2(0)$  太小, 则显然无法保证  $x_2(t)\beta$  的持续生存, 但若  $x_2(0)$  太大, 会使食饵种群  $x_1(t)\beta$  发生绝灭, 从而导致捕食种群  $x_2(t)\beta$  的绝灭。因此, 只有当  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$  都限定在一定范围内时, 才能使捕食种群  $x_2(t)$  永远  $\beta$  持续生存。

#### 参考文献:

- [1] Hallam T G, Ma Z E. On density and extinction in continuous population model[J]. J Math Biol, 1987, 25: 191-201
- [2] Ma Z E, Cui G R, Wang W D. Persistence and extinction of a population in a polluted environment[J]. Math Biosci, 1990, 101: 75-97
- [3] Yan H Z, Ma Z E. Persistence and extinction of an individual in a polluted environment[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(1): 145-156
- [4] Liu H P, Ma Z E. The threshold between persistence and extinction of two species communities in a polluted environment[J]. J Math Biol, 1991, 30: 49-61
- [5] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性方法与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001  
Ma Z E, Zhou Y C. Qualitative and Stability Methods of Ordinary Differential Equations[M]. Beijing: Science Press, 2001

## $\beta$ Persistence and $\beta$ Extinction of a Predator-prey Lotka-Volterra Model of Two Species

YAN Hui-zhen<sup>1</sup>, MA Zhi-en<sup>2</sup>, LIU Yan<sup>1</sup>

(1- College of Informational Science and Engineering, Dalian Polytechnic University, Dalian 116034;

2- Department of Mathematics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

**Abstract:** By using the limit theory and extension method, this paper studies the persistence and the extinction of a two-dimensional predator-prey Lotka-Volterra model in finite time. Namely, there are the  $\beta$  persistence and the  $\beta$  extinction of populations. It is discovered that the  $\beta$  persistence and the  $\beta$  extinction of populations are relevant to the initial quantity of populations. Under some conditions, the predator and the prey are  $\beta$  persistent in any finite time if the initial quantity of the two populations is limited within certain range.

**Keywords:** predator-prey model;  $\beta$  persistence;  $\beta$  extinction